

# СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА КОМПЛЕКСНОГО ОПЕРАТОРА ЭЙРИ НА ПОЛУОСИ

САВЧУК А. М., ШКАЛИКОВ А. А.

**АННОТАЦИЯ.** В работе доказана теорема о полноте системы корневых функций оператора Шредингера  $L = -d^2/dx^2 + p(x)$  на полуоси  $\mathbb{R}_+$  с потенциалом  $p$ , при котором оператор  $L$  оказывается максимально секториальным. Применение этой теоремы к оператору Эйри  $\mathcal{L}_c = -d^2/dx^2 + cx$ ,  $c = \text{const}$ , влечет за собой полноту системы собственных функций этого оператора в случае  $|\arg c| < 2\pi/3$ . С использованием более тонких методов в работе доказана теорема о сохранении полноты системы собственных функций этого специального оператора при выполнении условия  $|\arg c| < 5\pi/6$ .

## ВВЕДЕНИЕ

Основное содержание этой статьи связано с изучением оператора

$$(1) \quad \mathcal{L}_c = -\frac{d^2}{dx^2} + cx$$

на полуоси  $x \in [0, +\infty)$  с краевым условием Дирихле в нуле. Нас будет интересовать случай не вещественной константы  $c$ . Основной результат будет получен в теореме 1: *собственные функции этого оператора отвечают простым собственным значениям и образуют полную систему в пространстве  $L_2(\mathbb{R}_+)$  при условии  $|\arg c| < 5\pi/6$ .*

Мы рассмотрим также оператор

$$(2) \quad \mathcal{L}_{c,\alpha} = -\frac{d^2}{dx^2} + cx^\alpha, \quad x \in [0, \infty),$$

где  $\alpha > 0$ ,  $c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ . Изучение этого оператора удобно связать с операторами более общего вида

$$(3) \quad Ly = -y'' + p(x)y, \quad p(x) = q(x) \pm ir(x), \quad x \in [0, \infty),$$

где

$$(4) \quad r(x) \geq M_0, \quad q(x) \geq c_0 r(x) + M_1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\alpha} r(x) \geq a > 0, \quad \alpha > 0,$$

а  $M_0, M_1, c_0$  — вещественные константы, возможно отрицательные. Функции  $q$  и  $r$  достаточно считать локально суммируемыми. Мы получим теорему 2: *если выполнены условия (4) и оператор  $L_D$  порожден дифференциальным выражением (3) и краевым условием Дирихле в нуле, то система его корневых функций полна в пространстве  $L_2(\mathbb{R}_+)$  при условии  $|\gamma| < 2\alpha\pi/(2 + \alpha)$ , где  $\gamma = \arg(\pm i + c_0) \in (0, \pi)$ . Более того, эта система образует базис для метода суммирования Абеля–Лидского.*

Заметим, что потенциал  $cx^\alpha$  представим в виде  $|c|(\cos \gamma + i \sin \gamma)x^\alpha$ , поэтому теорема о полноте для оператора (2) справедлива при  $|\arg c| < 2\alpha\pi/(2 + \alpha)$ . В частности, при

$c = i$  теорема о полноте справедлива при  $\alpha > 2/3$ . Теорема 2 представляется более общей, но в применении к оператору (1) из нее следует утверждение о полноте только при  $|\arg c| < 2\pi/3$ . Доказательство теоремы 2 получается из общей теории, ведущей начало от работы Келдыша [1]. Эта теория развивалась многими авторами (см. подробности в [2, §4]). Приведенная здесь теорема есть обобщение теоремы Лидского [3], полученной им при условии, когда в (4) постоянная  $c_0 = 0$ . Но утверждение теоремы 1 при  $|\arg c| \in [2\pi/3, 5\pi/6)$  (которое не следует из теоремы 2) является существенно более тонким результатом. Он составляет наиболее важную часть работы.

Сформулированные результаты были получены авторами в 1999 г., вскоре после обсуждения этих задач с Дависом (см. работу [4]). Однако авторы откладывали публикацию, надеясь решить задачу о полноте для оператора  $\mathcal{L}_c$  полностью. Недавно Б. С. Митягин обратил наше внимание на поставленную Я. Алмогом (Y. Almog) проблему [5]: *будет ли система собственных функций оператора  $\mathcal{L}_{i,\alpha} = -d^2/dx^2 + ix^\alpha$  полной при  $\alpha \in (0, 2/3]$ ?* Ответа на этот вопрос мы не знаем, но очевидной является связь этой задачи с результатом теоремы 1. В частности, мы не сомневаемся в справедливости следующей гипотезы: *найдется число  $\alpha_0 < 2/3$ , такое, что собственные функции  $\mathcal{L}_{i,\alpha}$  образуют полную систему в  $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}_+)$  при  $\alpha \in (\alpha_0, 2/3]$ .*

Здесь мы рассматриваем операторы на полуоси  $\mathbb{R}_+$ , но результаты сохраняются для всей оси, если потенциалы продолжены на всю ось четным образом (см. замечание в конце работы). Обычно оператором Эйри называют оператор  $\mathcal{L}_c$  при  $c = i$  (см., например, [6]), но мы сохраняем это название для произвольного  $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Оператор Эйри изучался в связи с известной в гидромеханике задачей Орра–Зоммерфельда (см. работы [7]–[10] и имеющиеся там ссылки). Этот оператор связан также и с другими задачами механики (см., например, работу Алмога [6]). Для несамосопряженных операторов важно знать не только локализацию спектра, но и иметь информацию об  $\varepsilon$ -псевдоспектре  $\sigma_\varepsilon := \{\lambda \in \mathbb{C} : \|(L - \lambda I)^{-1}\| \geq \varepsilon^{-1}\}$ . В этом направлении отметим, например, работы Виолы, Ембри, Зигла, Крейчирика, Трефезена, Тэйтора, Хенри [11]–[13].

В теме, посвященной изучению оператора Шредингера с комплексным потенциалом  $p = q + ir$  можно выделить еще три направления. К первому направлению отнесем работы, в которых функция  $r$  в некотором смысле подчинена функции  $q$ , и соответствующий оператор является возмущением самосопряженного. Здесь отметим работы Аддучи, Виолы, Джакова, Зигла, Митягина и Шкаликова [14]–[20]. Ко второму направлению отнесем работы, в которых потенциал чисто мнимый, т.е.  $q(x) \equiv 0$ . Здесь выделим работы Дэвиса, Зигла, Крейчирика, Куидлаарса, Туманова и Шкаликова [4], [21]–[26]. К третьему направлению можно отнести работы по оператору Шредингера с так называемым  $PT$ -симметричным потенциалом  $p(x) = -\overline{p(-x)}$ . В этом направлении отметим работы Бендера, Ботчера, Зигла, Крейчирика, Еременко, Габриэлова и Шапиро [27]–[29]. В контексте нашей работы важно отметить работу Гребенкова, Хеффера и Хенри [30], в которой оператор Эйри изучался при  $c = i$  на полуоси и всей оси. В частности, было доказано, что собственные функции такого оператора на полуоси образуют полную систему, но не базис, а на всей оси спектр этого оператора пуст.

Мы ограничиваемся здесь рассмотрением только краевого условия Дирихле для простоты и конкретности изложения. Утверждения теорем и их доказательства сохраняются, если вместо условия Дирихле рассматривать условие  $y'(0) + hy(0) = 0$ ,  $h \in \mathbb{R}$ .

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА  $\mathcal{L}_c$  И ЕГО ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Дадим более точное определение оператора  $\mathcal{L}_c$  с краевым условием Дирихле. А именно, считаем, что  $\mathcal{L}_c$  определен в пространстве  $L_2(\mathbb{R}_+)$  дифференциальным выражением

$$l(y) = -y'' + cxy, \quad x \in [0, +\infty),$$

на области

$$\mathfrak{D}(\mathcal{L}_c) = \{y \in L_2(\mathbb{R}_+) : y \in W_{2,loc}^2, l(y) \in L_2(\mathbb{R}_+), y(0) = 0\}.$$

Константу  $c$  будем считать комплексной, причем  $c \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ . Иными словами, нас будет интересовать случай  $\gamma := \arg c \in (-\pi, \pi)$ . Очевидно, оператор  $\mathcal{L}_c$  плотно определен так как его область содержит бесконечно дифференцируемые функции с компактным носителем на интервале  $(0, +\infty)$ , множество которых плотно в  $L_2(\mathbb{R}_+)$ .

Далее мы будем иметь дело со специальными функциями — решениями уравнения Эйри  $y'' = zy$ . Хорошо известно (см., например, [31, Глава IV, §1] и [32, §10.4]), что это уравнение имеет пару линейно независимых решений  $\text{Ai}(z)$  и  $\text{Bi}(z)$ , с начальными условиями

$$\text{Ai}(0) = \frac{1}{3^{2/3}\Gamma(2/3)}, \quad \text{Ai}'(0) = -\frac{1}{3^{1/3}\Gamma(1/3)}, \quad \text{Bi}(0) = \frac{1}{3^{1/6}\Gamma(2/3)}, \quad \text{Bi}'(0) = \frac{3^{1/6}}{\Gamma(1/3)},$$

причем для Вронскиана этих функций справедливо равенство

$$W(\text{Ai}, \text{Bi}) = \text{Ai}(z)\text{Bi}'(z) - \text{Ai}'(z)\text{Bi}(z) = 1/\pi.$$

Обе этих функции являются целыми функциями порядка  $3/2$  и типа  $2/3$ . В области  $|\arg z| < \pi - \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$  произвольно мало, при  $|z| \rightarrow \infty$  функция  $\text{Ai}(z)$  допускает асимптотические представления<sup>1</sup>

$$(5) \quad \text{Ai}(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} z^{-1/4} e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}} (1 + O(z^{-3/2})), \quad \text{Ai}'(z) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} z^{1/4} e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}} (1 + O(z^{-3/2})).$$

Представления (5) можно дифференцировать произвольное количество раз. Видно, что функции  $\text{Ai}(z)$  и  $\text{Ai}'(z)$  экспоненциально убывают при  $|z| \rightarrow \infty$  на любом луче в секторе  $|\arg z| < \pi/3$ . Наконец, на луче  $\arg z = \pi$  для функции  $\text{Ai}(-x)$ ,  $x > 0$ , справедливо представление

$$\text{Ai}(-x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} |x|^{-1/4} \left( \sin \left( \frac{2}{3}|x|^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right) + O(|x|^{-3/2}) \right), \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Все нули  $z_k$  функции  $\text{Ai}(z)$  просты, лежат на луче  $\arg z = -\pi$  и

$$(6) \quad z_k = - \left[ \frac{3}{2}\pi \left( k - \frac{1}{4} \right) \right]^{2/3} + O(k^{-4/3}), \quad k = 1, 2, \dots$$

Вместо функции  $\text{Bi}(z)$  нам удобно будет использовать функцию  $U(z) := \text{Bi}(z) - \sqrt{3}\text{Ai}(z)$ , подчиненную начальным условиям

$$U(0) = 0, \quad U'(0) = \frac{2 \cdot 3^{1/6}}{\Gamma(1/3)}, \quad \text{причем } W(\text{Ai}, U) = 1/\pi.$$

В секторе  $|\arg z| < \pi/3$  эта функция имеет асимптотическое представление

$$(7) \quad U(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^{-1/4} e^{\frac{2}{3}z^{3/2}} (1 + O(z^{-3/2})), \quad U'(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^{1/4} e^{\frac{2}{3}z^{3/2}} (1 + O(z^{-3/2})).$$

<sup>1</sup>Здесь и далее мы будем фиксировать ветви функций  $z^\alpha$  условием  $\arg z \in [-\pi, \pi)$ .

Таким образом, функции  $U(z)$  и  $U'(z)$  экспоненциально растут при  $|z| \rightarrow \infty$  на любом луче этого сектора. Асимптотические представления функций  $U(z)$  и  $U'(z)$  в других секторах комплексной плоскости также хорошо известны, но здесь они нам не потребуются.

**Утверждение 1.** Область  $\mathfrak{D}(\mathcal{L}_c)$  совпадает с множеством функций вида

$$(8) \quad y(x) = \pi c^{-1/3} \left[ \text{Ai}(c^{1/3}x) \int_0^x U(c^{1/3}t) f(t) dt + U(c^{1/3}x) \int_x^\infty \text{Ai}(c^{1/3}t) f(t) dt \right],$$

где функция  $f(x)$  пробегает все пространство  $L_2(\mathbb{R}_+)$ . Для любой функции  $y \in \mathfrak{D}(\mathcal{L}_c)$ :

$$(9) \quad x^{1/2}y(x) \rightarrow 0, \quad y'(x) \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow +\infty, \quad x^{1/2}y(x), y'(x) \in L_2(\mathbb{R}_+).$$

Равенство (8) задает в пространстве  $L_2(\mathbb{R}_+)$  ограниченный оператор, являющийся обратным к оператору  $\mathcal{L}_c$ .

*Доказательство.* Заметим, что луч  $c^{1/3}x$ ,  $x > 0$ , лежит в секторе  $|\arg z| < \pi/3$  комплексной плоскости. Это означает, что функция  $\text{Ai}(c^{1/3}t)$  экспоненциально убывает, а значит несобственный интеграл в (8) сходится. Поскольку  $f \in L_2(\mathbb{R}_+)$ , то функция  $y$ , определенная равенством (8), лежит в пространстве  $W_2^1[0, b]$  для любого конечного  $b$ . Дифференцируя, получим

$$(10) \quad y'(x) = \pi \left[ \text{Ai}'(c^{1/3}x) \int_0^x U(c^{1/3}t) f(t) dt + U'(c^{1/3}x) \int_x^\infty \text{Ai}(c^{1/3}t) f(t) dt \right],$$

откуда следует, что  $y' \in W_2^1[0, b]$  для любого конечного  $b$ . Дифференцируя еще раз, получаем

$$\begin{aligned} y'' &= \pi \left[ \text{Ai}'(c^{1/3}x) U(c^{1/3}x) - U'(c^{1/3}x) \text{Ai}(c^{1/3}x) \right] f(x) + \\ &+ \pi c^{1/3} \left[ \text{Ai}''(c^{1/3}x) \int_0^x U(c^{1/3}t) f(t) dt + U''(c^{1/3}x) \int_x^\infty \text{Ai}(c^{1/3}t) f(t) dt \right] = -f(x) + cxy(x), \end{aligned}$$

т.е.  $y \in W_2^2[0, b]$  при любом  $b > 0$  и  $l(y) = f \in L_2(\mathbb{R}_+)$ . Так как  $y(0) = 0$  то  $y \in \mathfrak{D}(\mathcal{L}_c)$ . Верно и обратное утверждение. А именно, пусть  $y \in \mathfrak{D}(\mathcal{L}_c)$  и  $l(y) = f \in L_2(\mathbb{R}_+)$ . Согласно классической теореме об общем виде решения дифференциального уравнения,

$$\begin{aligned} y &= C_1 \text{Ai}(c^{1/3}x) + C_2 U(c^{1/3}x) + \\ &+ \pi c^{-1/3} \left[ \text{Ai}(c^{1/3}x) \int_0^x U(c^{1/3}t) f(t) dt + U(c^{1/3}x) \int_x^\infty \text{Ai}(c^{1/3}t) f(t) dt \right], \end{aligned}$$

где  $C_1, C_2$  — постоянные. Из равенства  $y(0) = 0$  следует  $C_1 = 0$ , а из условия  $y \in L_2(\mathbb{R}_+)$  и оценки (12), которую докажем ниже, получаем  $C_2 = 0$ , т.е.  $y$  допускает представление (8). Таким образом, формула (8) задает обратный оператор  $L_c^{-1}$ . Его ограниченность следует из оценки  $|y(x)| \leq M \|f\|$  на любом конечном интервале  $[0, b]$  и оценки (12). Здесь и далее через  $M$  (или  $M_1, M_2$ ) обозначаются различные положительные константы, а  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}$ .

Докажем соотношения (9). Вначале отметим, что в силу (7) найдется постоянная  $M$ , такая, что при  $t > 0$  выполняется оценка

$$|U(c^{1/3}t)| \leq M t^{-1/4} \exp(at^{3/2}), \quad a := \frac{2}{3}|c|^{1/2} \cos \frac{\gamma}{2}$$

(напомним, что  $\gamma = \arg c$ ). Легко видеть, что функция  $g(t) = t^{-1/4} \exp(at^{3/2})$  возрастает при достаточно больших  $t \geq b = b(a)$ . Поэтому при  $x > b + 1$  имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x U(c^{1/3}t) f(t) dt \right| &\leq \left( \int_0^b + \int_b^{x-1} + \int_{x-1}^x \right) |U(c^{1/3}t)| |f(t)| dt \leq \\ &\leq M_1 \|f\| + M \|f\| x^{1/4} \exp[a(x^{3/2} - x^{1/2})] + M x^{-1/4} \exp(ax^{3/2}) \left( \int_{x-1}^x |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Здесь  $M_1$  — постоянная, зависящая только от  $b$ . При переходе ко второму неравенству мы учли, что длина отрезка интегрирования для второго интеграла меньше  $x$ , а также неравенство  $(x-1)^{3/2} \leq x^{3/2} - x^{1/2}$ , верное при достаточно больших  $x$ . Из полученной оценки и представления (5) при достаточно больших  $x$  имеем

$$\begin{aligned} \left| \text{Ai}(c^{1/3}x) \int_0^x U(c^{1/3}t) f(t) dt \right| &\leq M x^{-1/4} \exp(-ax^{3/2}) \|f\| + \\ &+ M \exp(-ax^{1/2}) \|f\| + M x^{-1/2} \left( \int_{x-1}^x |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Мы получили оценку первого слагаемого в (8). Аналогично получаем оценку второго слагаемого. При достаточно больших  $t$  функция  $g(t) = t^{1/2} \exp(-at^{3/2})$  убывает, поэтому при больших  $x$

$$\begin{aligned} \left| \int_x^\infty \text{Ai}(c^{1/3}t) f(t) dt \right| &\leq M \left( \int_{x+1}^\infty g^2(t) t^{-3/2} dt \right)^{1/2} \|f\| + M \int_x^{x+1} g(t) t^{-3/4} |f(t)| dt \\ &\leq 2^{1/2} M x^{-1/4} g(x+1) \|f\| + M g(x) x^{-3/4} \left( \int_x^{x+1} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Так как  $(x+1)^{3/2} \leq x^{3/2} + x^{1/2}$ , то

$$U(c^{1/3}x) \leq M x^{1/4} g^{-1}(x), \quad g(x+1) g^{-1}(x) \leq M \exp(-ax^{1/2})$$

и модуль второго слагаемого в правой части равенства (8) оценивается величиной

$$M \exp(-ax^{1/2}) \|f\| + M x^{-1/2} \left( \int_x^{x+1} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Складывая полученные оценки, приходим к неравенству

$$(11) \quad |y(x)| \leq M_2 \exp(-ax^{1/2}) \|f\| + M_2 x^{-1/2} \left( \int_{x-1}^{x+1} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}, \quad x > b + 1,$$

что доказывает первое соотношение в (9). Второе соотношение в (9) получается так же, только вместо равенства (8) используем (10) и учитываем, что оценки производных  $\text{Ai}'$  и  $U'$  отличаются от оценок самих функций множителем  $x^{1/2}$ .

Докажем, что  $x^{1/2}y(x) \in L_2(\mathbb{R}_+)$ . Из оценки (11) получаем

$$\begin{aligned} (12) \quad \int_b^\infty |x^{1/2}y(x)|^2 dx &\leq M \|f\|^2 \int_b^\infty x \exp(-2ax^{1/2}) dx + \\ &+ M \int_b^\infty \int_{x-1}^{x+1} |f(t)|^2 dt dx \leq M \|f\|^2 + M \int_{b-1}^\infty |f(t)|^2 \int_{t-1}^{t+1} dx dt \leq M \|f\|^2. \end{aligned}$$

Включение  $y' \in L_2(\mathbb{R}_+)$  получается аналогично, если учесть, что  $|y'(x)|$  оценивается величиной в правой части (11), умноженной на  $x^{1/2}$ . Этим завершается доказательство утверждения.  $\square$

**Утверждение 2.** Числовой образ оператора  $\mathcal{L}_c$  лежит в замкнутом секторе  $S_\gamma$  комплексной плоскости, ограниченном лучами  $\arg \lambda = 0$  и  $\arg \lambda = \gamma$ , где  $\gamma = \arg c$ .

*Доказательство.* Квадратичная форма нашего оператора имеет вид

$$(\mathcal{L}_c y, y) = \int_0^\infty (-y'' \bar{y} + c x y \bar{y}) dx = -\bar{y}(x) y'(x) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty |y'|^2 dx + c \int_0^\infty x |y|^2 dx.$$

Остается заметить, что  $y(0) = 0$  и  $\bar{y}(x) y'(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$  в силу (9).  $\square$

**Утверждение 3.** Оператор  $\mathcal{L}_c$  замкнут и имеет нулевые дефектные числа (размерность ядра и коразмерность образа). Сопряженный оператор  $\mathcal{L}_c^*$  совпадает с оператором  $\mathcal{L}_{\bar{c}}$ .

*Доказательство.* Первое утверждение следует из утверждения 1, поскольку мы предъявили обратный оператор  $\mathcal{L}_c$ , который замкнут, поскольку ограничен. Следовательно, обратный к нему также замкнут. Для доказательства второго утверждения проверим равенство Лагранжа. Пусть  $y(x) \in \mathfrak{D}(\mathcal{L}_c)$ , а  $u(x) \in \mathfrak{D}(\mathcal{L}_{\bar{c}})$ . Тогда

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_c y, u) &= \int_0^\infty (-y''(x) \bar{u}(x) + c y(x) \bar{u}(x)) dx = \int_0^\infty (-y(x) \bar{u}''(x) + y(x) \bar{c} u(x)) dx + \\ &+ y(x) \bar{u}'(x) \Big|_0^\infty - y'(x) \bar{u}(x) \Big|_0^\infty = \int_0^\infty (-y(x) \bar{u}''(x) + y(c) \bar{c} u(x)) dx = (y, \mathcal{L}_{\bar{c}} u). \end{aligned}$$

Положим  $\mathcal{L}_c y = z$ ,  $\mathcal{L}_{\bar{c}} u = v$ . Из равенства Лагранжа получаем

$$(z, \mathcal{L}_{\bar{c}}^{-1} v) = (\mathcal{L}_c y, u) = (y, \mathcal{L}_{\bar{c}} u) = (y, v) = (\mathcal{L}_c^{-1} z, v) \quad \forall z, v \in L_2(\mathbb{R}_+).$$

Следовательно,  $\mathcal{L}_{\bar{c}}^{-1} = (\mathcal{L}_c^{-1})^*$ . Но тогда  $\mathcal{L}_{\bar{c}} = \mathcal{L}_c^*$ .  $\square$

**Утверждение 4.** Резольвента  $\mathcal{R}_c(\lambda) = (\mathcal{L}_c - \lambda I)^{-1}$  определена и является ограниченным оператором для любого  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus S_\gamma$ , где сектор  $S_\gamma$  определен в утверждении 2. При этом

$$(13) \quad \|\mathcal{R}_c(\lambda)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq \frac{1}{\text{dist}(\lambda, S_\gamma)}.$$

*Доказательство.* При  $\gamma = 0$  оператор  $\mathcal{L}_c$  самосопряжен и положителен,  $S_\gamma = \mathbb{R}_+$  и доказываемое утверждение хорошо известно. Пусть  $\gamma \neq 0$ . Согласно утверждению 2, оба оператора  $T_1 = e^{i(\pi/2-\gamma)} \text{sign } \gamma \cdot \mathcal{L}_c$  и  $T_2 = -i \text{sign } \gamma \cdot \mathcal{L}_c$  являются аккретивными (т.е.  $\text{Re}(T_j y, y) \geq 0$  для любого  $y \in \mathfrak{D}(\mathcal{L}_c) = \mathfrak{D}(T_j)$ ,  $j = 1, 2$ ). В силу утверждения 3, оба этих оператора замкнуты и имеют нулевые дефектные числа, т.е. являются замкнутыми максимальными аккретивными операторами. Следовательно для любого  $z$  из открытой левой полуплоскости операторы  $T_1 - zI$  и  $T_2 - zI$  обратимы и (см., например, [33, Гл.III.10])

$$\|(T_1 - zI)^{-1}\| \leq |\text{Re } z|^{-1} \quad \text{и} \quad \|(T_2 - zI)^{-1}\| \leq |\text{Re } z|^{-1}.$$

Очевидно, эти оценки эквивалентны оценке (13).  $\square$

Из утверждения 2 следует, что числовой образ оператора  $\mathcal{L}_c$  лежит в секторе  $S_\gamma$ . Поэтому оператор  $T = e^{-i\gamma/2} \mathcal{L}_c$  является секториальным, а из утверждения 4 следует, что

этот оператор является  $m$ -секториальным. С любым  $m$ -секториальным оператором единственным образом ассоциируется замкнутая секториальная полуторолинейная форма. Мы найдем ее явный вид.

**Утверждение 5.** *Замкнутая секториальная полуторолинейная форма  $\mathfrak{t}$  оператора  $T = e^{-i\gamma/2}\mathcal{L}_c$  имеет вид*

$$(14) \quad \begin{aligned} \mathfrak{t}[u, v] &= e^{-i\gamma/2} \int_0^\infty u'(x) \bar{v}'(x) dx + |c| e^{i\gamma/2} \int_0^\infty xu(x) \bar{v}(x) dx, \\ u, v &\in \mathfrak{D}(\mathfrak{t}) = \{y \in L_2(\mathbb{R}_+) : y', x^{1/2}y \in L_2(\mathbb{R}_+)\}. \end{aligned}$$

*Доказательство.* Определим форму  $\mathfrak{t}_0[u, v] = (Tu, v)$  на области  $\mathfrak{D}(T) = \mathfrak{D}(\mathcal{L}_c)$ . Интегрируя по частям, так же как в доказательстве утверждения 2, получаем

$$\mathfrak{t}_0[u, v] = e^{-i\gamma/2} \int_0^\infty u'(x) \bar{v}'(x) dx + |c| e^{i\gamma/2} \int_0^\infty xu(x) \bar{v}(x) dx.$$

Очевидно, определенный выше линейал  $\mathfrak{D}(\mathfrak{t})$  является замкнутым множеством в норме, порожденной скалярным произведением

$$[u, v] = \int_0^\infty (xu(x) \bar{v}(x) + u'(x) \bar{v}'(x)) dx,$$

т.е.  $\mathfrak{D}(\mathfrak{t})$  является гильбертовым пространством с таким скалярным произведением. Заметим, что  $\mathfrak{D}(\mathcal{L}_c)$  является ядром формы  $\mathfrak{t}$  (см. [33, Гл. VI, Теорема 2.1]). Поэтому область определения замыкания формы  $\mathfrak{t}_0$  совпадает с  $\mathfrak{D}(\mathfrak{t})$ , и форма  $\mathfrak{t}$ , отвечающая оператору  $T$ , имеет вид (14).  $\square$

**Утверждение 6.** *Для любого  $\lambda$  из резольвентного множества оператор  $\mathcal{R}_c(\lambda)$  компактен. Спектр оператора  $\mathcal{L}_c$  дискретен и состоит из последовательности простых собственных значений*

$$(15) \quad \lambda_n = t_n c^{2/3}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{где } t_n > 0 \quad \text{и} \quad t_n = [(3\pi/2)(n - 1/4)]^{2/3} + O(n^{-4/3}).$$

*Им отвечают собственные функции*

$$(16) \quad y_n(x) = \text{Ai}(-t_n + xc^{1/3}), \quad n = 1, 2, \dots$$

*Доказательство.* Компактность резольвенты оператора  $T = e^{-i\gamma/2}\mathcal{L}_c$  эквивалентна компактности резольвенты оператора  $H = \text{Re } T$  (см. [33, Гл. VI, Теорема 3.3]). Оператор  $H$  порождается квадратичной формой  $\mathfrak{h} = \text{Re } \mathfrak{t}$ , т.е.

$$\mathfrak{h}[u, v] = \cos(\frac{\gamma}{2}) \int_0^\infty u'(x) \bar{v}'(x) dx + |c| \cos(\frac{\gamma}{2}) \int_0^\infty xu(x) \bar{v}(x) dx, \quad \mathfrak{D}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{D}(\mathfrak{t}).$$

Оператор  $H$  однозначно восстанавливается по квадратичной форме, поэтому из утверждения 5 получаем

$$(17) \quad \begin{aligned} Hy &= \cos(\frac{\gamma}{2})(-y'' + |c|xy), \\ \mathfrak{D}(H) &= \{y \in L_2(\mathbb{R}_+) : y \in W_{2,loc}^2, -y'' + |c|xy \in L_2(\mathbb{R}_+), y(0) = 0\}. \end{aligned}$$

Компактность резольвенты  $(H - \lambda)^{-1}$  следует из критерия Молчанова (см., например, [34, Гл. VII, §24]). Итак, резольвента  $\mathcal{R}_c(\lambda)$  компактна, а спектр  $\sigma(\mathcal{L}_c)$  дискретен. Запишем уравнение на собственные значения

$$-y'' + cxy = \lambda y \quad y(0) = 0, \quad y \in L_2(\mathbb{R}_+).$$

Сделаем замену  $t = -\lambda c^{-2/3} + xc^{1/3}$ . Тогда уравнение можно записать в виде  $-y''_{tt} + ty = 0$ , т.е.

$$(18) \quad y(x) = C_1 \text{Ai}(c^{1/3}x - \lambda c^{-2/3}) + C_2 \text{U}(c^{1/3}x - \lambda c^{-2/3}).$$

Учитывая (5) и (7), получаем  $C_2 = 0$ , а поскольку  $y(0) = 0$ , приходим к уравнению на собственные значения  $\text{Ai}(-\lambda c^{-2/3}) = 0$ . Остается заметить, что все нули функции  $\text{Ai}(z)$  просты, а равенства (15) теперь следуют из (6). Подставляя в (18)  $\lambda = \lambda_n$ , получаем равенства (16).  $\square$

#### ТЕОРЕМА О ПОЛНОТЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРА $\mathcal{L}_c$

**Теорема 1.** Система собственных функций оператора  $\mathcal{L}_c$  полна и минимальна в  $L_2(\mathbb{R}_+)$  при условии  $|\arg c| < (5\pi)/6$ .

*Доказательство.* Минимальность системы собственных функций  $\{y_n\}$  оператора  $\mathcal{L}_c$  следует из известных соотношений

$$(y_n, z_k) = c_n \delta_{nk}, \quad c_n \neq 0,$$

где  $\{z_k\}$  — система собственных функций сопряженного оператора  $\mathcal{L}_{\bar{c}}$ . Для доказательства полноты будем использовать метод Левинсона (см. [35, Приложение 4]), принимая во внимание наличие функции  $\text{Ai}(w + c^{1/3}x)$ , порождающей собственные функции  $y_n$  при  $w = -t_n$ . Для определенности далее будем рассматривать случай  $\text{Im } c \geq 0$ , т.е.  $\gamma \in [0, \pi)$ , где  $\gamma = \arg c$ . Случай  $\gamma \in (-\pi, 0]$  рассматривается аналогично (проводимые ниже оценки в секторах комплексной плоскости получаются аналогично в секторах, симметричных относительно вещественной оси).

Доказательство разобьем на несколько этапов. Пусть функция  $f \in L_2(\mathbb{R}_+)$  ортогональна собственным функциям оператора  $\mathcal{L}_c$ . Рассмотрим функцию

$$(19) \quad F(w) = \frac{F_0(w)}{\text{Ai}(w)}, \quad F_0(w) = \int_0^\infty \text{Ai}(w + xc^{1/3})f(x)dx.$$

На первом шаге мы покажем, что функция  $F$  является целой функцией порядка  $\rho \leq 3/2$  и конечного типа при  $\rho = 3/2$ . На втором шаге покажем, что функция  $F$  допускает оценку

$$(20) \quad |F(w)| \leq M \|f\| R^{1/2}, \quad R = |w| \geq 1$$

в секторе

$$(21) \quad S = \{w \in \mathbb{C} : -\pi + \gamma/3 \leq \arg w \leq \pi - 2\gamma/3\}.$$

На третьем шаге мы покажем, что существует число  $\alpha_0 \in (0, \gamma/3)$ , такое, что оценка (20) остается справедливой в секторе  $S' = S \cup S_0$ , где

$$(22) \quad S_0 = \{w \in \mathbb{C} : -\pi + \alpha_0 \leq \arg w \leq -\pi + \gamma/3\}.$$

Число  $\alpha_0$  не удастся вычислить явно (оно является корнем трансцендентного уравнения), но удастся показать, что раствор дополнительного сектора  $\mathbb{C} \setminus S'$  меньше  $2\pi/3$ , если только  $\gamma < 5\pi/6$ . Это влечет выполнение оценки (20) во всей комплексной плоскости. На четвертом шаге мы покажем  $F(w) \equiv 0$ , а на пятом шаге получим  $f(x) \equiv 0$ . Приступим к реализации намеченного плана.



*Шаг 1.* Покажем, что функция  $F_0$  в (19) корректно определена и голоморфна по параметру  $w \in \mathbb{C}$ . Зафиксируем произвольное число  $\delta \in (0, \pi/4]$ , такое, что  $\gamma/2 + \delta < \pi/2$ . Пусть  $w$  пробегает компакт  $|w| \leq R$ . Представим функцию  $F_0$  в виде

$$F_0(w) = \left( \int_0^{x_0} + \int_{x_0}^{\infty} \right) \text{Ai}(w + xc^{1/3})f(x)dx := F_1(w) + F_2(w), \quad x_0 = x_0(R) = \frac{R}{|c|^{1/3} \sin(2\delta/3)}.$$

Первый интеграл является собственным и, стало быть, голоморфен по параметру  $w$  в круге  $|w| \leq R$ , а для доказательства голоморфности второго интеграла заметим, что при  $x > x_0(R)$

$$\left| \arg \left( 1 + \frac{w}{c^{1/3}x} \right) \right| \leq \frac{2\delta}{3}, \quad \implies \quad \arg(w + c^{1/3}x)^{3/2} \in \left[ \frac{\gamma}{2} - \delta, \frac{\gamma}{2} + \delta \right].$$

Тогда при  $x > x_0(R)$  и  $|w| \leq R$  имеем

$$(23) \quad \text{Re}(w + c^{1/3}x)^{3/2} \geq |w + c^{1/3}x|^{3/2} \cos \left( \frac{\gamma}{2} + \delta \right) \geq \frac{3}{2} a_1 (|c|^{1/3}x - R)^{3/2},$$

где  $a_1 := 2/3 \cos(\gamma/2 + \delta)$ . Следовательно, в силу (5) и (23) при  $x > x_0(R)$

$$(24) \quad |\text{Ai}(w + c^{1/3}x)| \leq M \exp \left\{ \frac{2}{3} \text{Re}(w + c^{1/3}x)^{3/2} \right\} \leq M \exp \left\{ -a_1 (|c|^{1/3}x - R)^{3/2} \right\}.$$

Аналогичная оценка сохраняется и для  $\text{Ai}'(w + c^{1/3}x)^{3/2}$ , только правую часть нужно умножить на  $|w + c^{1/3}x|^{1/4}$ . Отсюда следует, что интеграл  $F_2(w)$  сходится равномерно по параметру  $w$  в круге  $|w| \leq R$  и остается равномерно сходящимся после дифференцирования по  $w$ , т.е. функция  $F_2$  голоморфна в круге  $|w| \leq R$ . Поскольку  $R$  произвольно, функция  $F_0 = F_1 + F_2$  является целой. Более того, целой является и функция  $F(w)$ , поскольку все точки  $w = -t_k$  являются ее устранимыми особенностями (по нашему предположению, функция  $F_0(w)$  обращается в этих точках в нуль, а функция  $\text{Ai}(w)$  имеет в этих точках простые нули).

Теперь оценим рост функции  $F_0(w)$  при  $|w| \rightarrow \infty$ . Длина отрезка интегрирования в интеграле  $F_1$  пропорциональна  $R$ , поэтому

$$(25) \quad |F_1(w)| \leq MR^{1/2} \|f\| \exp \left\{ \frac{2}{3} (R + |c|^{1/3}x_0(R))^{3/2} \right\} \leq MR^{1/2} \|f\| \exp (M_1 R^{3/2}).$$

Положим  $v(x) = \exp \left\{ -a_1 (|c|^{1/3}x - R)^{3/2} + x \right\}$ , где число  $a_1$  определено в (23). Эта функция убывает при  $x > x_0$ , если число  $x_0 = x_0(R)$  достаточно большое. Поэтому из (24) получаем

$$(26) \quad |F_2(w)| \leq M \int_{x_0}^{\infty} \exp \left\{ -a_1 (|c|^{1/3}x - R)^{3/2} + x \right\} |f(x)| e^{-x} dx \\ \leq 2^{-1/2} M \|f\| \exp \left\{ -a_1 (|c|^{1/3}x_0(R) - R)^{3/2} + x_0 \right\}, \quad x_0 = \frac{R}{|c|^{1/3} \sin(2\delta/3)}.$$

Следовательно,  $|F_2(w)| \rightarrow 0$  при  $w \rightarrow \infty$ . Из (25) следует, что  $F_0 = F_1 + F_2$  — целая функция порядка не выше  $3/2$  и конечного типа при порядке  $3/2$ . Тогда целая функция  $F(w)$ , равная отношению двух целых функций  $F_0(w)$  и  $\text{Ai}(w)$ , имеет характеристику роста, не превосходящую максимальную характеристику роста числителя и знаменателя (см., например, [35, Гл. I, §9]), т.е. функция  $F$  имеет порядок  $\rho \leq 3/2$ , а при  $\rho = 3/2$ , конечный тип.

*Шаг 2.* Рассмотрим секторы

$$(27) \quad \begin{aligned} S_1 &= \{w \in \mathbb{C} : -\pi + \gamma/3 \leq \arg w \leq -\pi/3 + \varepsilon\}, \\ S_2 &= \{w \in \mathbb{C} : \pi/3 - \varepsilon \leq \arg w \leq \pi - 2\gamma/3\}, \end{aligned}$$

где число  $\varepsilon \in (0, \pi/3)$  выберем ниже. Согласно (26) и (5),

$$(28) \quad \frac{|F_2(w)|}{|Ai(w)|} \leq M\|f\| \exp \left\{ \frac{2}{3} \left( \cos(\frac{3\varphi}{2}) - \frac{\cos(\frac{\gamma}{2} + \delta)(1 - \sin(\frac{2\delta}{3}))^{3/2}}{\sin^{3/2}(\frac{2\delta}{3})} \right) R^{3/2} + \frac{R}{|c|^{1/3} \sin(\frac{2\delta}{3})} \right\},$$

где  $\varphi = \arg w$ . В объединении  $S_1 \cup S_2$  секторов, определенных в (27), выполнена оценка  $\cos(3\varphi/2) \leq \sin(3\varepsilon/2)$ . Выберем число  $\varepsilon > 0$  так, чтобы

$$\sin\left(\frac{3\varepsilon}{2}\right) - \frac{\cos(\frac{\gamma}{2} + \delta)(1 - \sin(\frac{2\delta}{3}))^{3/2}}{\sin^{3/2}(\frac{2\delta}{3})} < 0.$$

Тогда при  $R \rightarrow \infty$ , получаем оценку

$$(29) \quad |F_2(w)|/|Ai(w)| = o(1)\|f\|.$$

Далее, вновь применяя (5), получаем

$$(30) \quad |F_1(w)|/|Ai(w)| \leq MR^{1/2}\|f\| \max_{x>0} e^{\xi(x)},$$

где

$$(31) \quad \xi(x) = \frac{2}{3} \left( \cos(\frac{3\varphi}{2}) R^{3/2} - \operatorname{Re}(w + c^{1/3}x)^{3/2} \right), \quad x \in [0, +\infty).$$

Заметим, что  $\xi'(x) = -\operatorname{Re}(c^{1/3}(w + c^{1/3}x)^{1/2})$ , откуда следует, что  $\xi'(x) \leq 0$ , если

$$(32) \quad \arg(w + c^{1/3}x) \in [-\pi, \pi - 2\gamma/3].$$

В этом случае  $\xi(x)$  монотонно невозрастает, а так как  $\xi(0) = 0$ , то  $\xi(x) \leq 0$ . Поэтому при выполнении условия (32) из (30) получаем

$$(33) \quad |F_1(w)|/|Ai(w)| \leq M\|f\|R^{1/2} \quad \text{при } |w| = R \rightarrow \infty.$$

Проверим, что условие (32) выполнено в объединении  $S_1 \cup S_2$  для любого  $x \geq 0$ . Разберем два случая. Если  $\varphi \in [-\pi + \gamma/3, -\pi/3 + \varepsilon]$ , то оба вектора  $w$  и  $c^{1/3}x$  лежат в полуплоскости  $-\pi + \gamma/3 \leq \arg z \leq \gamma/3$ , а значит в той же полуплоскости лежит их сумма. Если же  $\varphi \in [\pi/3 - \varepsilon, \pi - 2\gamma/3]$ , то оба вектора  $w$  и  $c^{1/3}x$  лежат в секторе  $0 \leq \arg z \leq \pi - 2\gamma/3$  раствора  $\leq \pi$ , а значит в том же секторе лежит их сумма. В обоих случаях условие (32) выполнено и мы доказали, что в объединении  $S_1 \cup S_2$  секторов, заданных (27), справедлива оценка (33). Учитывая оценку (29), получаем, что в объединении  $S_1 \cup S_2$  справедлива асимптотическая оценка

$$(34) \quad |F(w)| \leq M\|f\|R^{1/2}.$$

Сектор  $S$  определен формулой (21), а раствор сектора  $S \setminus (S_1 \cup S_2)$  меньше  $2\pi/3$ . Применив теорему Фрагмена–Линделефа к функции  $\tilde{F}(w) = F(w)(w+1)^{-1/2}$ , получим, что оценка (34) выполняется во всем секторе  $S$ .

*Шаг 3.* Остается оценить функцию  $F$  в секторе  $S'' = \mathbb{C} \setminus S$ . Раствор сектора  $S''$  равен  $\gamma$ ; поэтому оценка  $F$  в оставшемся секторе также получается из теоремы Фрагмена–Линделефа, если  $\gamma < 2\pi/3$ . В случае  $\gamma \in [2\pi/3, 5\pi/6)$ , который мы рассмотрим теперь, требуются дополнительные оценки.

Пусть  $-\pi < \varphi < -\pi + \gamma/3$ . Оценка дроби  $|F_2(w)|/|Ai(w)|$  не меняется (эта дробь по-прежнему ограничена некоторой константой), поскольку  $\cos(3\varphi/2) < 0$  и мы можем воспользоваться оценкой (28). Докажем оценку (33) в секторе  $S_0$ , определенном (22), где  $\alpha_0 < \gamma/3$ . Исследуем на максимум функцию  $\xi(x)$ , определенную в (31). Напомним, что ветвь отображения  $z^{3/2}$  зафиксирована нами выбором аргумента  $\arg z \in [-\pi, \pi)$ . Легко видеть, что при  $\varphi \in (-\pi, -\pi + \gamma/3)$  луч  $w + c^{1/3}x$ ,  $x > 0$ , пересекает луч  $(-\infty, 0)$ , а значит кривая  $(w + c^{1/3}x)^{3/2}$ ,  $x \in [0, +\infty)$ , имеет разрыв первого рода в точке, которую мы обозначим  $x_1$ . Заметим, однако, что величина скачка в точке  $x_1$  — чисто мнимое число, так что функция  $\xi(x)$  непрерывна. Проведем исследование функции  $\xi$  отдельно на промежутках  $x \in (0, x_1)$  и  $x \in (x_1, +\infty)$ . На первом промежутке  $\xi'(x) < 0$ , так как аргумент числа  $w + c^{1/3}x$  меняется от  $\varphi$  (при  $x = 0$ ) до  $-\pi$  (при  $x = x_1$ ), т.е. выполняется условие (32). На втором промежутке аргумент числа  $w + c^{1/3}x$  монотонно убывает от  $\pi$  (при  $x = x_1 + 0$ ) до  $\gamma/3$  (при  $x \rightarrow +\infty$ ), а значит найдется единственная точка, которую мы обозначим  $x_2$ , в которой  $\arg(w + c^{1/3}x) = \pi - 2\gamma/3$ . В точке  $x_2$  производная  $\xi'$  меняет знак с плюса на минус, т.е.  $x_2$  — точка локального максимума функции  $\xi$ . Таким образом, оценка (33), которая, в силу (30) эквивалентна условию  $\xi(x) \leq 0$  при  $x \in [0, +\infty)$ , выполняется в точности тогда, когда  $\xi(x_2) \leq 0$ . Чтобы вычислить значение  $\xi(x_2)$  рассмотрим на комплексной плоскости треугольник с вершинами в точках 0,  $w$  и  $w + c^{1/3}x_2$ . Соответствующие углы этого треугольника равны  $\alpha + 2\gamma/3$ ,  $\gamma/3 - \alpha$  и  $\pi - \gamma$  (здесь мы ввели обозначение  $\alpha = \pi + \varphi \in (0, \gamma/3)$ ),  $\varphi = \arg w$ . В силу теоремы синусов

$$|w + c^{1/3}x_2| = R \frac{\sin(\gamma/3 - \alpha)}{\sin \gamma}$$

$$\implies \operatorname{Re}(w + c^{1/3}x_2)^{3/2} = |w + c^{1/3}x_2|^{3/2} \cos(\frac{3\pi}{2} - \gamma) = -R^{3/2} \frac{\sin^{3/2}(\frac{\gamma}{3} - \alpha)}{\sin^{1/2} \gamma},$$

$$\xi(x_2) = \frac{2}{3} R^{3/2} \left( \cos(\frac{3\varphi}{2}) + \frac{\sin^{3/2}(\frac{\gamma}{3} - \alpha)}{\sin^{1/2} \gamma} \right) = \frac{2}{3} R^{3/2} \left( \frac{\sin^{3/2}(\frac{\gamma}{3} - \alpha)}{\sin^{1/2} \gamma} - \sin(\frac{3\alpha}{2}) \right).$$

Итак, неравенство  $\xi(x_2) \leq 0$  равносильно условию

$$(35) \quad \sin^{3/2}(\gamma/3 - \alpha) \sin^{-1/2} \gamma - \sin(3\alpha/2) \leq 0.$$

Обозначим правую часть этого неравенства — функцию переменной  $\alpha \in [0, \gamma/3]$  с параметром  $\gamma \in [2\pi/3, \pi)$  через  $\eta(\alpha)$ . Легко видеть, что  $\eta(\alpha)$  монотонно убывает,  $\eta(0) > 0$  и  $\eta(\gamma/3) < 0$ . Таким образом, неравенство (35) выполнено на отрезке  $\alpha \in [\alpha_0, \gamma/3]$  для некоторого  $\alpha_0 \in (0, \gamma/3)$ . Это означает, что оценка (33), а значит и (34), доказана нами для всех лучей  $\arg w = \varphi \in [-\pi + \alpha_0, \pi - 2\gamma/3]$ . Принцип Фрагмена–Линделефа позволит нам распространить эту оценку на всю комплексную плоскость, если раствор оставшегося угла, равный  $\alpha_0 + 2\gamma/3$  строго меньше  $2\pi/3$ . Число  $\alpha_0 = \alpha_0(\gamma)$  является корнем трансцендентного уравнения  $\eta(\alpha) = 0$ . Мы не будем его искать в каком бы то ни было виде, а вместо этого заметим, что в силу монотонности функции  $\eta$

$$\alpha_0 + \frac{2\gamma}{3} < \frac{2\pi}{3} \iff \alpha_0 < \frac{2(\pi - \gamma)}{3} \iff \eta\left(\frac{2(\pi - \gamma)}{3}\right) < 0$$

$$\iff \sin^{3/2}(\gamma - \frac{2\pi}{3}) \sin^{-1/2} \gamma - \sin \gamma < 0 \iff \sin^{3/2}(\gamma - \frac{2\pi}{3}) < \sin^{3/2} \gamma \iff \gamma < \frac{5\pi}{6}.$$

*Шаг 4.* Итак, при  $\gamma < 5\pi/6$  целая функция  $F(w)$  допускает асимптотическую оценку (34) во всей комплексной плоскости, а значит, равна константе. Докажем, что эта константа равна нулю. Для этого достаточно убедиться, что  $F(w) \rightarrow 0$  при  $w \rightarrow \infty$  хотя бы по одному лучу в комплексной плоскости. Вернемся к началу шага 2, выберем луч  $w = Re^{-i\pi/2}$  и заметим, что он попадает в сектор  $S_1$ , а потому выполнена оценка (29). Остается усилить оценку (33). Для этого разобьем путь интегрирования  $x \in [0, x_0]$  на два участка точкой  $x_3(R) = R^{-\theta}$ , где  $\theta \in (0, 1/2)$  произвольно. Так как

$$\frac{|F_1(w)|}{|\text{Ai}(w)|} \leq M \int_0^{x_0(R)} |f(x)| e^{\xi(x)} dx,$$

где функция  $\xi(x)$  определена в (31) и монотонно убывает на  $[0, +\infty)$  от  $\xi(0) = 0$  к  $-\infty$ , то

$$\left( \int_0^{x_3} + \int_{x_3}^{x_0} \right) |f(x)| e^{\xi(x)} dx \leq \|f\| (\sqrt{x_3} + \sqrt{x_0} e^{\xi(x_3)}) \leq \|f\| (R^{-\theta/2} + CR^{1/2} e^{\xi(x_3)}).$$

Остается заметить, что при  $R \rightarrow \infty$

$$\xi(x_3(R)) \sim -\text{Re}(c^{1/3} x_3 w^{1/2}) = -|c|^{1/3} R^{-\theta+1/2} \cos(\gamma/3 - \pi/4),$$

а значит  $R^{1/2} e^{\xi(x_3(R))} = o(1)$ . Следовательно,  $F(w) \equiv 0$ .

*Шаг 5.* Мы доказали, что функция  $F_0(w) = \int_0^\infty \text{Ai}(w + c^{1/3}x) d\mu \equiv 0$  (здесь и далее для сокращения записи обозначаем  $d\mu = f(x)dx$ ). Напомним, что  $\text{Ai}''(t) = t\text{Ai}(t)$ , откуда по индукции

$$\text{Ai}^{(n)}(t) = P_n(t)\text{Ai}(t) + Q_n(t)\text{Ai}'(t),$$

где  $P_n$  и  $Q_n$  — многочлены. При этом

$$\begin{array}{llllll} P_0(t) = 1, & P_1(t) = 0, & P_2(t) = t, & P_3(t) = 1, & P_4(t) = t^2, & P_5(t) = 4t, \\ Q_0(t) = 0 & Q_1(t) = 1, & Q_2(t) = 0, & Q_3(t) = t, & Q_4(t) = 2, & Q_5(t) = t^2, \end{array}$$

$$P_n(t) = P'_{n-1}(t) + tQ_{n-1}(t), \quad Q_n(t) = P_{n-1}(t) + Q'_{n-1}(t).$$

Положим  $\deg P_n(t) = p_n$ ,  $\deg Q_n(t) = q_n$ . Тогда для всех  $n \geq 5$

$$\begin{cases} p_n = q_{n-1} + 1, \\ q_n = p_{n-1} \end{cases} \implies \begin{cases} p_n = p_{n-2} + 1, \\ q_n = q_{n-2} + 1 \end{cases},$$

откуда легко выводим, что для всех  $n \geq 2$

$$(36) \quad \begin{array}{ll} p_{2n} = n, & p_{2n+1} = n - 1, \\ q_{2n} = n - 2, & q_{2n+1} = n. \end{array}$$

Проводя дифференцирование по переменной  $w$ , получим

$$(37) \quad F_0^{(j)}(w) = \int_0^\infty P_j(w + c^{1/3}x) \text{Ai}(w + c^{1/3}x) + Q_j(w + c^{1/3}x) \text{Ai}'(w + c^{1/3}x) d\mu \equiv 0$$

для всех  $j \geq 0$ . В частности,

$$\begin{aligned} F_0(w) &= \int_0^\infty \text{Ai}(w + c^{1/3}x) d\mu \equiv 0, & F'_0(w) &= \int_0^\infty \text{Ai}'(w + c^{1/3}x) d\mu \equiv 0, \\ F''_0(w) &= \int_0^\infty (w + c^{1/3}x) \text{Ai}(w + c^{1/3}x) d\mu \equiv 0 \implies \int_0^\infty x \text{Ai}(w + c^{1/3}x) d\mu \equiv 0, \\ F'''_0(w) &= \int_0^\infty (\text{Ai}(w + c^{1/3}x) + (w + c^{1/3}x) \text{Ai}'(w + c^{1/3}x)) d\mu \equiv 0 \\ &\implies \int_0^\infty x \text{Ai}'(w + c^{1/3}x) d\mu \equiv 0. \end{aligned}$$

Докажем по индукции, что

$$(38) \quad \int_0^\infty x^n \text{Ai}(w + c^{1/3}x) d\mu \equiv \int_0^\infty x^n \text{Ai}'(w + c^{1/3}x) d\mu \equiv 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

База индукции — случай  $n = 0$  и  $n = 1$ . В этом случае равенства уже доказаны. Если равенства (38) доказаны для всех  $n < N$ , где  $N \geq 2$ , то, записав (37) для  $j = 2N$  и учитывая (36), получим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left( (w + c^{1/3}x)^N + \sum_{k=0}^{N-1} a_{j,k}(w + c^{1/3}x)^k \right) \text{Ai}(w + c^{1/3}x) + \\ + \left( \sum_{k=0}^{N-2} b_{j,k}(w + c^{1/3}x)^k \right) \text{Ai}'(w + c^{1/3}x) d\mu \equiv 0, \end{aligned}$$

откуда, в силу предположения индукции,

$$\int_0^\infty x^N \text{Ai}(w + c^{1/3}x) d\mu \equiv 0.$$

Записав теперь равенство (37) для  $j = 2N + 1$  и вновь приняв во внимание (36), получим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left( \sum_{k=0}^{N-1} a_{j,k}(w + c^{1/3}x)^k \right) \text{Ai}(w + c^{1/3}x) + \\ + \left( (w + c^{1/3}x)^N + \sum_{k=0}^{N-1} b_{j,k}(w + c^{1/3}x)^k \right) \text{Ai}'(w + c^{1/3}x) d\mu \equiv 0, \end{aligned}$$

откуда, в силу предположения индукции и уже проведенного шага,

$$\int_0^\infty x^N \text{Ai}'(w + c^{1/3}x) d\mu \equiv 0.$$

Равенства (38) доказаны.

Теперь из равенств (38) стандартным приемом получим  $f(x) \equiv 0$ . Рассмотрим преобразование Фурье

$$h(\lambda) = \int_0^\infty e^{-i\lambda x} \text{Ai}(c^{1/3}x) f(x) dx.$$

В силу (5) эта функция является целой функцией переменного  $\lambda$ . Заметим, что

$$h^{(n)}(0) = (-i)^n \int_0^\infty x^n \text{Ai}(c^{1/3}x) f(x) dx = 0, \quad n = 0, 1, \dots,$$

а значит  $h(\lambda) \equiv 0$ . Тогда в силу инъективности преобразования Фурье тождественно нулевой является и функция  $\text{Ai}(c^{1/3}x)f(x)$ , поэтому  $f(x) \equiv 0$ . Этим завершается доказательство теоремы 1.  $\square$

### ТЕОРЕМА О ПОЛНОТЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРА $L$

**Теорема 2.** Пусть оператор  $L$  задан дифференциальным выражением (3) на области

$$\mathfrak{D}(L) = \{y \in L_2(\mathbb{R}_+) : y, y' \in AC_{loc} \text{ } l(y) \in L_2(\mathbb{R}_+), y(0) = 0\},$$

где  $AC_{loc}$  — пространство локально абсолютно непрерывных функций, и пусть выполнены условия (4). Если

$$\arg(c_0 + i) =: \gamma < 2\pi\alpha/(2 + \alpha),$$

то система корневых функций оператора  $L$  полна в  $L_2(\mathbb{R}_+)$ . Более того, эта система образует базис для метода суммирования Абеля порядка  $\beta$  при любом  $\beta \in \left(\frac{2+\alpha}{2\alpha}, \frac{\pi}{\gamma}\right)$ .

*Доказательство.* Сначала поясним, что означает понятие базиса для суммирования методом Абеля. Для простоты считаем, что все собственные значения простые (в общем случае см. [2, §5]). Рассмотрим ряд

$$S(t, f) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left\{(-e^{-i\gamma/2}\lambda_k)^\beta t\right\} (f, z_k)y_k,$$

где  $\{y_k\}$  — система собственных функций оператора  $L$ , отвечающая собственным значениям  $\lambda_k$ , а  $\{z_k\}$  — биортогональная к ней система. Второе утверждение теоремы означает, что  $\forall f \in L_2(\mathbb{R}_+)$  ряд  $S(t, f)$  сходится  $\forall t > 0$  по норме пространства  $L_2(\mathbb{R}_+)$  и существует сильный предел  $S(t, f) \rightarrow f$  при  $t \rightarrow +0$ . Конечно, если система  $\{y_k\}$  есть базис для метода суммирования Абеля, то она полна, так как из определения следует, что любая функция  $f$  может быть приближена конечными линейными комбинациями системы с произвольной точностью.

Не ограничивая общности считаем, что постоянные  $M_0, M_1$  в условиях (4) положительны. Пусть  $\mathfrak{D}_0(L)$  подмножество в  $\mathfrak{D}(L)$ , состоящее из функций с компактным носителем. Повторяя рассуждения из работы Лидского [3], получаем, что в условиях теоремы имеет место случай точки Вейля, т.е. только одно решение уравнения  $l(y) = 0$  принадлежит  $L_2(\mathbb{R}_+)$ . В этом случае оператор  $L$  имеет ограниченный обратный. Более того, в этом случае  $\mathfrak{D}_0(L)$  является ядром оператора  $L$ , т.е. замыкание сужения оператора  $L$  на  $\mathfrak{D}_0(L)$  совпадает с  $L$ . Но для всех  $f \in \mathfrak{D}_0(L)$  числовой образ  $(Lf, f)$  лежит в секторе, ограниченным в верхней полуплоскости лучами  $\arg \gamma$  и  $\mathbb{R}_+$ . Это утверждение вытекает из (4) после интегрирования по частям. Из обратимости  $L$  следует, что оператор  $T = e^{-i\gamma/2}L$  является  $m$ -секториальным с раствором угла  $\gamma$ . Тогда оператор  $H = \text{Re } T$  задается на области  $\mathfrak{D}(H) = \mathfrak{D}(L)$  дифференциальным выражением

$$l(y) = -y'' + \tilde{r}(x)y,$$

причем из условий (4) следует оценка  $\tilde{r}(x) \geq Mr(x) \geq Max^\alpha$ . В работе Лидского доказано, что при выполнении такого неравенства собственные значения  $s_n$  оператора  $H$  подчинены оценке

$$s_n \geq M n^{2\alpha/(2+\alpha)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

т.е. порядки операторов  $H$  и  $L$  не меньше  $2\alpha/(2+\alpha)$ . Теперь утверждение теоремы следует из теоремы Лидского–Мацаева, см. [2, Теорема 5.1].  $\square$

**Замечание 1.** В случае четного потенциала полнота собственных функций оператора Шредингера на полуоси с условиями Дирихле и Неймана соответственно, влечет за собой полноту собственных функций этого оператора на всей оси. Действительно, нечетные и четные продолжения собственных функций операторов Дирихле и Неймана на полуоси задают собственные функции оператора на всей оси.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Келдыш М. В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР. **77**:1, 11–14.
- [2] Шкаликов А. А. Возмущения самосопряженных и нормальных операторов с дискретным спектром // УМН, **71**:5, 113–174.
- [3] Лидкий В. Б. Несамосопряженный оператор типа Штурма-Лиувилля с дискретным спектром // Труды ММО, **9** (1960). С. 45–79.
- [4] Davies E. B. Wild spectral behaviour of anharmonic oscillators // Bull. Lond. Math. Soc. **32**:4 (2000), 432–438.
- [5] Materials of the workshop “Mathematical aspects with non-self-adjoint operators”. A list of open problems. <http://aimath.org/pastworkshop/nonselfadjointproblems.pdf>
- [6] Almog Y. The stability of the normal state of superconductors in the presence of electric currents // Siam. J. Math. Anal. **40**:2 (2008), 824–850.
- [7] Шкаликов А. А. Предельное поведение спектра при больших значениях параметра в одной модельной задаче // Матем. заметки. **62**:5 (1997), 950–953.
- [8] Дьяченко А. В., Шкаликов А. А. О модельной задаче для уравнения Орра–Зоммерфельда с линейным профилем // Функц. анализ и его прил. **36**:3 (2002), 71–75.
- [9] Туманов С. Н., Шкаликов А. А. О локализации спектра задачи Орра–Зоммерфельда для больших чисел Рейнольдса // Матем. заметки. **72**:4 (2002), 561–569.
- [10] Шкаликов А. А. Spectral Portraits of the Orr-Sommerfeld operator // J. Math. Sci. **124**:6 (2004), 5417–5441.
- [11] Trefethen L. N., Embree M. Spectra and Pseudospectra: Nonnormal matrices and operators. Princeton Univ. Press, Princeton, 2005.
- [12] Krejčířík D., Siegl P., Tater M., Viola J. Pseudospectra in non-Hermitian quantum mechanics // J. Math. Phys. **56** (2015), 503 – 513.
- [13] Henry R., Krejčířík D. Pseudospectra of the Schrodinger operator with a discontinuous complex potential // J. Spectr. Theory (to appear, 2017), <https://arxiv.org/abs/1503.02478>.
- [14] Adduci J., Mityagin B. S. Eigensystem of an  $L_2$ -perturbed harmonic oscillator is an unconditional basis // Cent. Eur. J. Math. **10**:2 (2012), 569–589.
- [15] Шкаликов А. А. О базисности корневых векторов возмущенного самосопряженного оператора // Труды МИАН **269** (2010), 290–303.
- [16] Djakov P., Mityagin B. S. Riesz bases consisting of root functions of 1D Dirac operators // Proc. Amer. Math. Soc. **141**:4 (2013), 1361–1375.
- [17] Mityagin B. S. The Spectrum of a Harmonic Oscillator Operator Perturbed by Point Interactions // Int. J. Theor. Phys. **54** (2015), 4068I–4085.
- [18] Mityagin B. S., Siegl P., Viola J. Differential operators admitting various rates of spectral projection growth // J. Func. Anal. (to appear, 2017). arXiv:1309.3751.
- [19] Mityagin B. S., Siegl P. Root system of singular perturbations of the harmonic oscillator type operators // Lett. Math. Phys. **106**:2 (2016), 147–167.
- [20] Mityagin B. S., Siegl P. Local form-subordination condition and Riesz basisness of root systems // arXiv:1608.00224v1, 2016.
- [21] Davies E. B. Semi-Classical States for Non-Self-Adjoint Schrödinger Operators // Comm. Math. Phys. **200**:1 (1999), 35–41.
- [22] Туманов С. Н., Шкаликов А. А. О предельном поведении спектра модельной задачи для уравнения Орра–Зоммерфельда с профилем Пуазейля // Изв. РАН. Сер. матем. **66**:4 (2002), 177–204.
- [23] Davies E. B., Kuijlaars A. B. J. Spectral asymptotics of the non-self-adjoint harmonic oscillator // J. London Math. Soc. **70**:2 (2004), 420–426.

- [24] *Henry R.* Spectral instability of some non-selfadjoint anharmonic oscillators // C. R. Math. Acad. Sci. Paris **350**:23-24 (2012), 1043–1046.
- [25] *Henry R.* Spectral instability for even non-selfadjoint anharmonic oscillators // J. Spec. Theory **4**:2 (2014), 349–364.
- [26] *Henry R.* Spectral Projections of the Complex Cubic Oscillator // Ann. Henri Poincaré **15**:10 (2014), 2025–2043.
- [27] *Bender C. M., Boettcher S.* Real spectra in non-Hermitian Hamiltonians having  $\mathcal{PT}$ -symmetry // Phys. Rev. Lett. **80**:24 (1998), 5243.
- [28] *Siegl P., Krejčířík D.* On the metric operator for the imaginary cubic oscillator // Phys. Rev. **86**:12 (2012), 121702.
- [29] *Eremenko A., Gabrielov A., Shapiro B.* High energy eigenfunctions of one-dimensional Schrodinger operators with polynomial coefficients // Comput. Methods Funct. Theory, **8**:2 (2008), 513–529.
- [30] *Grebenkov D. S., Helffer B., Henry R.* The complex Airy operator with a semi-permeable barriers // arXiv:1603.06992v1
- [31] *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, Наука, М., 1983.
- [32] *Abramowitz M., Stegun I.* Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables, National Bureau of Standards. Appl. Math. Series., vol. 52, Washington, 1972.
- [33] *Kato T.* Perturbation theory for linear operators, Springer-Verlag, New-York, 1980.
- [34] *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы, Наука, М., 1969.
- [35] *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций, ГИТТЛ, М., 1956.